



# ピクトの独り言

フーリエ変換の話し\_その4



株式会社 アイネット



# スペクトルの用語 1



- スペクトル図表は、フーリエ変換の終着駅です。
- スペクトル、正確には「パワースペクトル」ですね。
- この図表は、非常に重要な情報を提供してくれます。
- この内容をきちんと解明しなければいけません。
- まず、用語を検討してみましょう。
- 用語では、「パワー」と「スペクトル」に分けましょう。
- 次に、その意味なり特徴なりを解明しましょう。
- そこでは、4つのポイントに留意してください。

# スペクトルの用語 2



- パワーは、「力 (Force)」ではありません。
  - パワーは、「2乗」とか「単位仕事量」という意味です。
  - ここでの単位とは、「時間当たりの量=率」のことです。
  - スペクトルは、「光の分布状況」という意味でしょう。
  - これを併せると・・・。
  - 「仕事率の分布状況を二乗計算したもの」でしょう。
- 
- 画像フーリエの場合はどうでしょう。
  - パワーは、「色値と色配置」を「二乗計算」したもの。
  - スペクトルは、「その分布状況」です。だから・・・。
  - 「色値と色置の分布状況を二乗計算したもの」ですかね。
  - ...多分(笑)。

# 二乗計算



- 次は、スペクトルの特徴です。
- これには、4つのポイントがあります。
- 最初の2つは、簡単です。
  
- 第1のポイントは、面積計算です。
- 二乗計算をしているため、「面積計算」となっています。
- $x$  も  $y$  も、計算結果は面積となっています。
  
- 第2のポイントは、絶対値計算です。
- 二乗計算のために、すべて正の符号になっています。

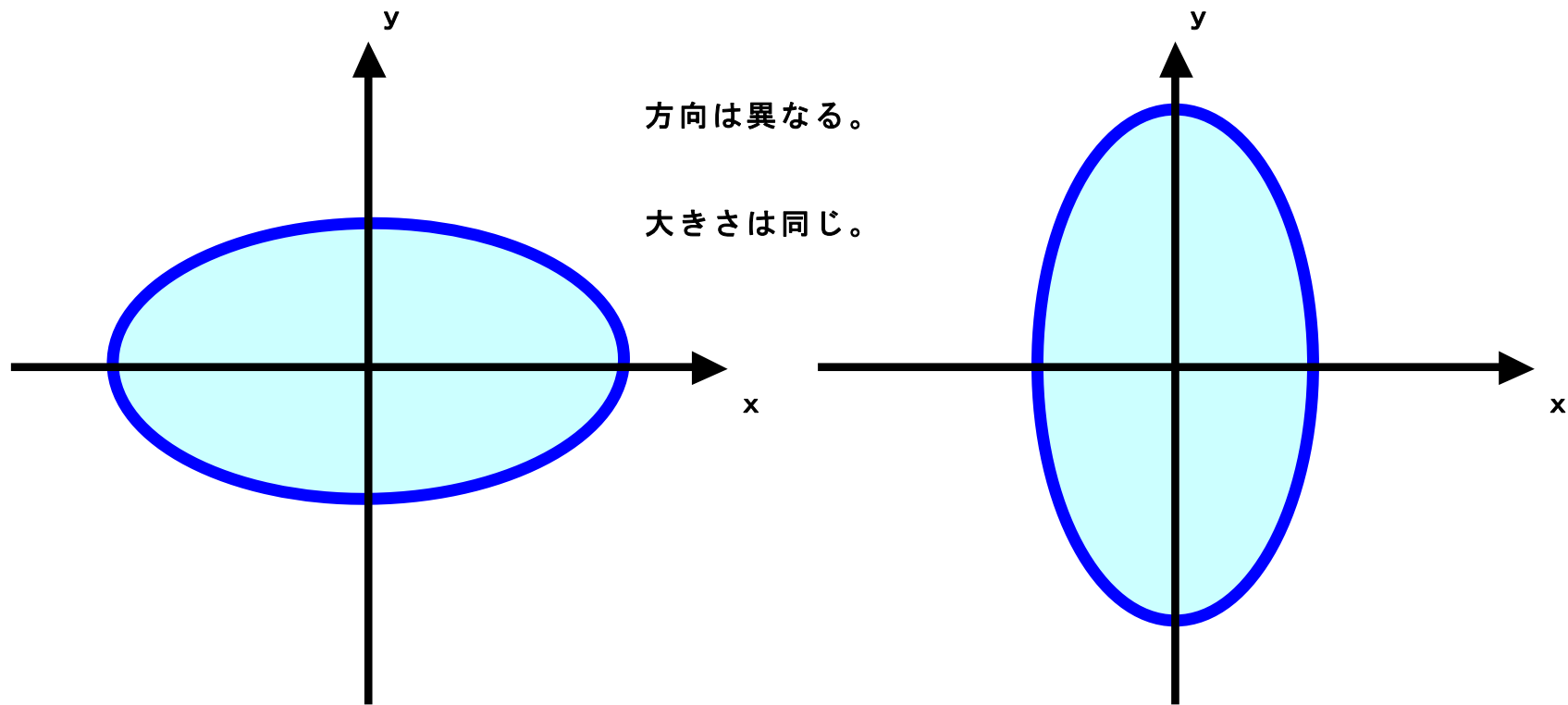
# 色値の並び 1



- 第3のポイントは、色値の配置順（「並び」）にあります。
- 色値の並びが一緒であれば、同じパワーになります。
  
- $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$  と  $C \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow B$  は、同じ値です。
- 反対の  $D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$  と  $B \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow C$  も同じです。
  
- 同じ大きさで、向きが違う楕円形があると考えてください。
- 同じ大きさですから、全体の面積は常に一定です。
  
- これが、色値の並び（配置順）の特徴です。
- これを「パワーは同じで、位相は異なる。」と言います。
- 位相の「位」は配置（位置）、「相」は姿（向き）ですね。

# 画像18

パワーは同じで、位相は異なる。



# 色値の並び 2



- $x$  と  $y$  の計算で、縦の合計を思い出してください。
- 中央の色値だけが、8回分、重複合計されました。
- ですから、中央値を基準にしていたことが分かります。
- では、他の色値を基準にした場合には、どうか。
- どの色値を基準にしても、パワー値は必ず一致します。
- 同じ面積だからです。
- でも、二乗する前の  $x$  と  $y$  の計算結果は異なります。
- そのため、位相が異なるということになります。
- 第3のポイントは、このことを示しています。

# 色値の並び3



- 具体的に計算してみましょう。
- 色Noの6番と7番を、頭に持ってきてみましょう。
- これまでの0番～5番は、2番以降に繰り下がります。
- 色No    0   1   2   3   4   5   6   7
- 色値    120, 130, 200, 210, 220, 230, 100, 110。
  
- 二乗する前のxとyの合計値は異なりますね。
- これは、基準となる色値が異なることを意味します。
  
- しかしどうですか、パワーは同じ値でしょう。
- どの色値を頭に持ってきてても、パワーは同じなのです。



# 画像19



## 色値の配置順

### 修正後データ

色No	cos	sin	合計	平方根
色値	1,320	1,320	1,320	1,320
4	△40.0	0.0	1,600	40.0
5	41.4	△100.0	11,714	108.2
6	40.0	40.0	3,200	56.6
7	△241.4	100.0	68,274	261.3
0	1,320.0	0.0	1,742,400	1,320.0
1	△241.4	△100.0	68,274	261.3
2	40.0	△40.0	3,200	56.6
3	41.4	100.0	11,714	108.2
合計	960.0	0.0	1,910,376	2,212.2

### 修正前データ

cos	sin	合計	平方根
1,320	1,320	1,320	1,320
△40.0	0.0	1,600	40.0
100.0	41.4	11,714	108.2
△40.0	△40.0	3,200	56.6
100.0	241.4	68,274	261.3
1,320.0	0.0	1,742,400	1,320.0
100.0	△241.4	68,274	261.3
△40.0	40.0	3,200	56.6
100.0	△41.4	11,714	108.2
1,600.0	0.0	1,910,376	2,212.2

# 画像20



x の計算表 = 「フーリエ計算した x の色値」

色No	4	5	6	7	0	1	2	3	合計
色値	220	230	100	110	120	130	200	210	1,320
4	220.0	△230.0	100.0	△110.0	120.0	△130.0	200.0	△210.0	△40.0
5	△220.0	162.6	0.0	△77.8	120.0	△91.9	0.0	148.5	41.4
6	220.0	0.0	△100.0	0.0	120.0	0.0	△200.0	0.0	40.0
7	△220.0	△162.6	0.0	77.8	120.0	91.9	0.0	△148.5	△241.4
0	220.0	230.0	100.0	110.0	120.0	130.0	200.0	210.0	1,320.0
1	△220.0	△162.6	0.0	77.8	120.0	91.9	0.0	△148.5	△241.4
2	220.0	0.0	△100.0	0.0	120.0	0.0	△200.0	0.0	40.0
3	△220.0	162.6	0.0	△77.8	120.0	△91.9	0.0	148.5	41.4
合計	0.0	0.0	0.0	0.0	960.0	0.0	0.0	0.0	960.0



# イメージ1



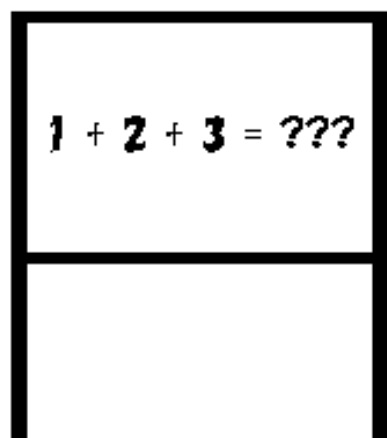
- 第4のポイントは、スペクトル図表の理解の仕方です。
- この図表は、イメージで理解すべきものなんです。
  
- 確かに、スペクトル図表は、数式で計算できます。
- 数式もパソコンを使用すれば瞬時に計算できます。
- でも、数式だけではスペクトル図表を真に理解できません。
  
- 正確でなくても結構、大雑把で結構です。
- 「★★イメージ的にスペクトル画像を考える。★★」
- そう言う姿勢が重要ではないかと思います。
  
- 私は画像補正ソフトですが、「科学より直感」です(笑)。

# 画像22

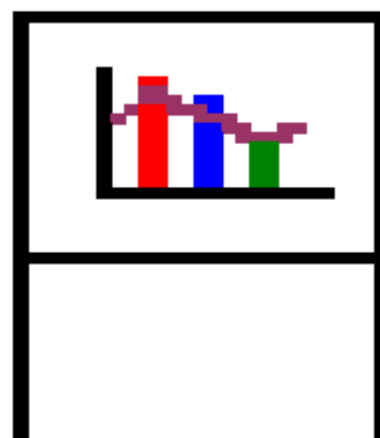
inet

## イメージ\_「科学より直感」

うーん、なんだか  
良くわからない？



実に面白い！



# イメージ2



- では、図形的・直感的に理解できることを目指しましょう。
- そのためには、グラフを使用する必要があります。
  
- 先の計算結果は、そのままではグラフになりません。
- 中央値だけが異常に突出してしまうからです。
- そこで、ログ（Log＝対数関数）を使用します。
  
- 対数関数と聞くと、腰が砕けそうですかね。
- 数学の教科書を開きたくなる方も居られるかもお（笑）。
  
- ですが、フーリエ変換で使用する Log は簡単です。
- ここでは、「数値を滑らかにする方法」でしかありません。

# ログ計算



- エクセルを使用して、=LOG(パワー値) を計算しましょう。
- ここで、2つだけ注意すべきことがあります。
- Log を使うときは、平方根計算をしません。
- 無駄な計算を避けるためです。
- そして、Log で計算した値の最大値を 100.0% とします。
- 最大値を 100.0% にするのは、画像を見易くするためです。
- ここでは、10.0 に正規化しています。
  
- Log 自体が、計算を丸めるためのものです。
- 「★★あくまでも図表を綺麗に表示すること★★」
- これが重要です。そのように割り切りましょう(笑)。

# 画像23



## Logを使用して表示

色No	cos	sin	cos <sup>2</sup>	sin <sup>2</sup>	合計	Log	正規化
色値	1,320	1,320	1,320	1,320	1,320	1,320	1,320
4	△40.0	0.0	1,600	0	1,600	3.2	5.1
5	100.0	41.4	10,000	1,714	11,714	4.1	6.5
6	△40.0	△40.0	1,600	1,600	3,200	3.5	5.6
7	100.0	241.4	10,000	58,274	68,274	4.8	7.7
0	1,320.0	0.0	1,742,400	0	1,742,400	6.2	10.0
1	100.0	△241.4	10,000	58,274	68,274	4.8	7.7
2	△40.0	40.0	1,600	1,600	3,200	3.5	5.6
3	100.0	△41.4	10,000	1,714	11,714	4.1	6.5
合計	1,600.0	0.0	1,787,200	123,176	1,910,376	34.3	54.9

丸められた値



# 画像パターン



■ 直感的な分析のため、画像をパターン分けしましょう。

- ① 滑らかな画像
- ② 凹凸ある画像
- ③ 対照的な画像
- ④ 歪（いびつ）な画像

■ 具体的には、次のような画像にしましょう。

- ① 100, 110, 120, 130, 140, 150, 160, 170。
- ② 140, 120, 150, 100, 140, 150, 100, 120。
- ③ 100, 110, 120, 130, 100, 110, 120, 130。
- ④ 130, 120, 140, 110, 150, 100, 140, 100。

# 滑らかな画像

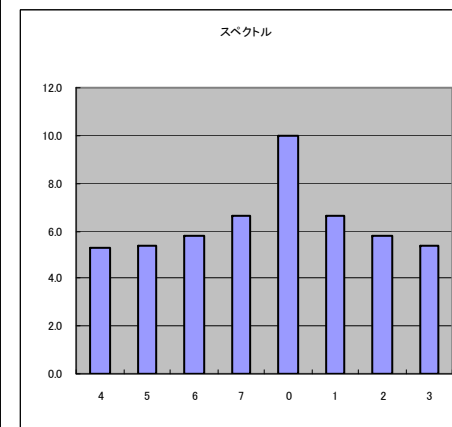
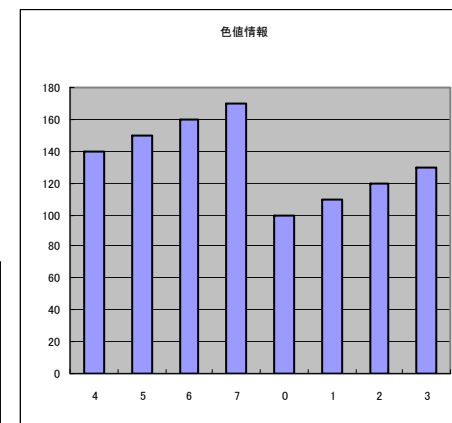
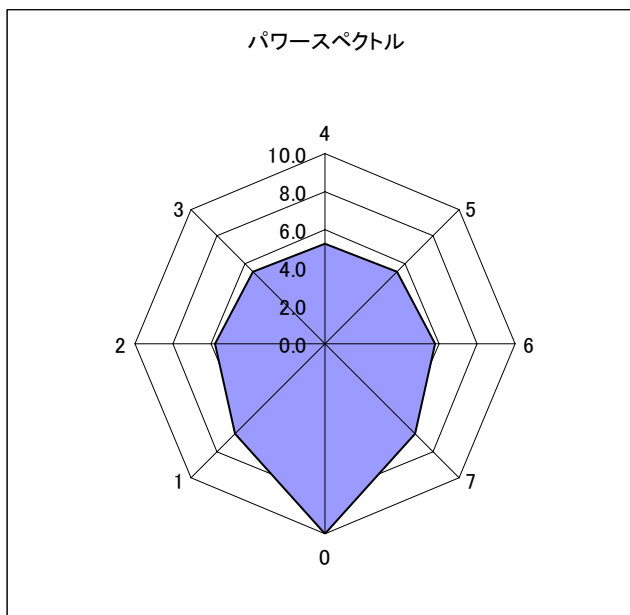
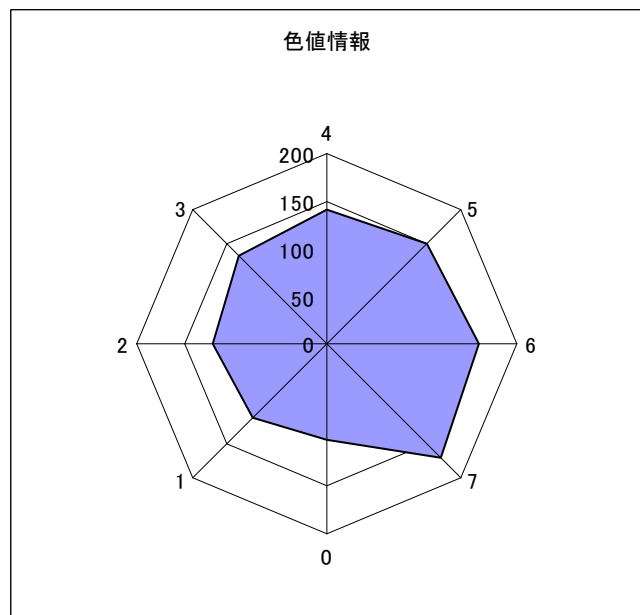


- 滑らかな画像は、隣との色差が少ないのが特徴です
- 色差が小さく、輪郭とノイズが少ないことが分かります。
  
- 画像にも、この手のものはよく見受けられます。
- ノイズが多く見辛い画像は、敬遠されますからね(笑)。
  
- 1行と7行は、サインの符号が連続しています。
- 3行と5行は、サインの符号が飛び飛びです。
- 正負が入り乱れると、色値が打ち消し合います。
- そのため、中央の方が色値合計が大きくなるのです。
  
- 滑らかな画像は、中央部に色値が集中します。

# 画像24

inet

## 滑らかな画像\_計算結果



# 画像25



## 滑らかな画像\_計算資料

No	色値	cos	sin	cos <sup>2</sup>	sin <sup>2</sup>	total	log	正規化
4	140	△ 40.0	△ 0.0	1600	0	1600	3.2	5.3
5	150	△ 40.0	△ 16.6	1600	275	1875	3.3	5.4
6	160	△ 40.0	△ 40.0	1600	1600	3200	3.5	5.8
7	170	△ 40.0	△ 96.6	1600	9325	10925	4.0	6.7
0	100	1080.0	0.0	1166400	0	1166400	6.1	10.0
1	110	△ 40.0	96.6	1600	9325	10925	4.0	6.7
2	120	△ 40.0	40.0	1600	1600	3200	3.5	5.8
3	130	△ 40.0	16.6	1600	275	1875	3.3	5.4
	1080	800.0	△ 0.0	1177600	22400	1200000	30.9	50.9

# 凹凸ある画像

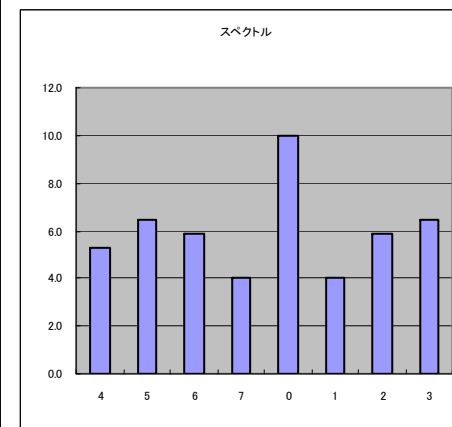
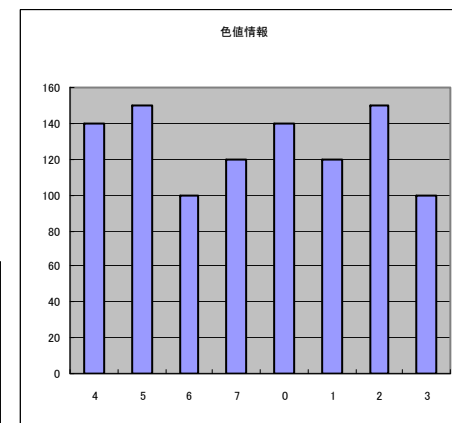
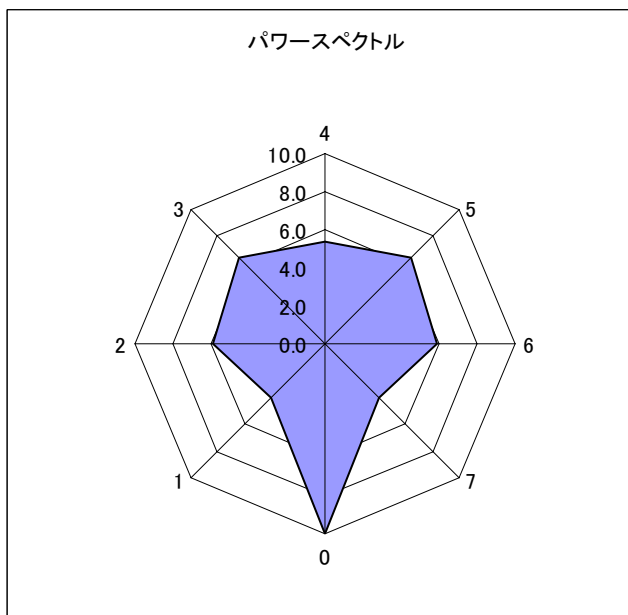
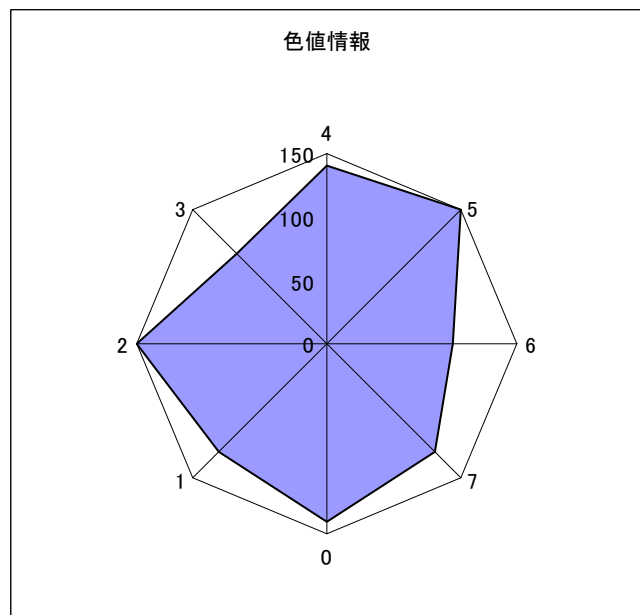


- 凹凸ある画像は、輪郭が多く、ノイズも多い画像です。
- ここでは、隣との色値の差が激しい画像と仮定します。
  
- 図で、凹凸が多く、隣との色差が多いことが分かります。
- スペクトルの周縁部の色値が大きいことも理解できます。
  
- 凹凸のある画像を滑らかな画像と比較してください。
- 二つの違いは、符号の連続か断続（非連続）にあります。
  
- 位相を変えれば、違う角度から確認できるでしょう。
- 位相を変えて、自分で確認してね(笑)。

# 画像26

inet

## 凹凸のある画像\_計算結果



# 画像27



## 凹凸のある画像\_計算資料

No	色値	cos	sin	cos <sup>2</sup>	sin <sup>2</sup>	total	log	正規化
4	140	40.0	△ 0.0	1600	0	1600	3.2	5.3
5	150	7.1	△ 85.4	50	7286	7336	3.9	6.4
6	100	30.0	50.0	900	2500	3400	3.5	5.9
7	120	△ 7.1	14.6	50	214	264	2.4	4.0
0	140	1020.0	0.0	1040400	0	1040400	6.0	10.0
1	120	△ 7.1	△ 14.6	50	214	264	2.4	4.0
2	150	30.0	△ 50.0	900	2500	3400	3.5	5.9
3	100	7.1	85.4	50	7286	7336	3.9	6.4
	1020	1120.0	0.0	1044000	20000	1064000	28.9	48.0

# 対照的な画像



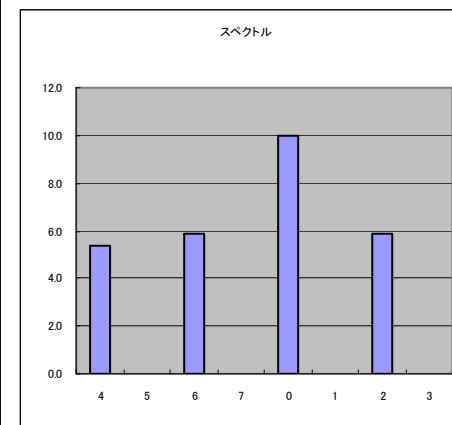
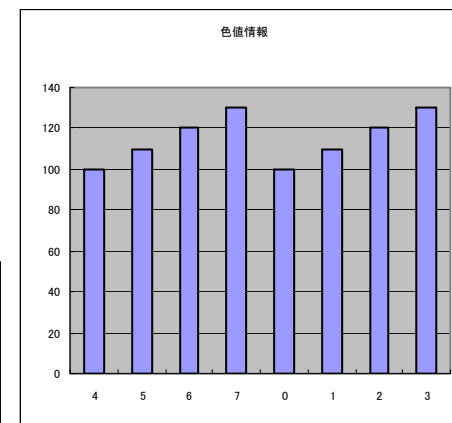
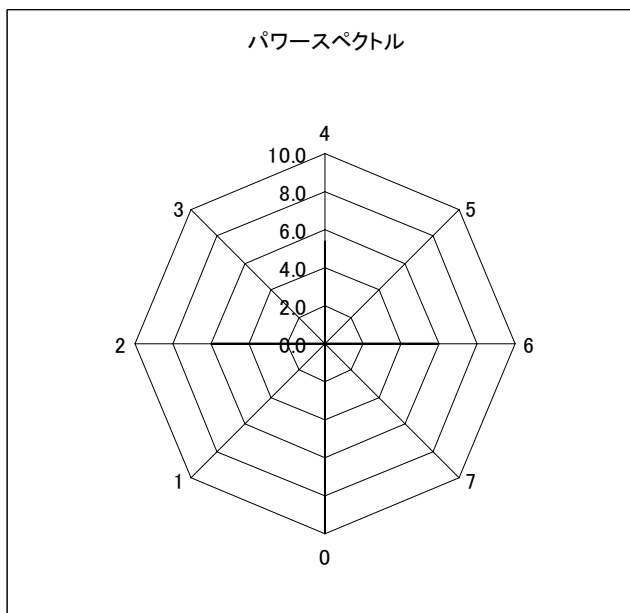
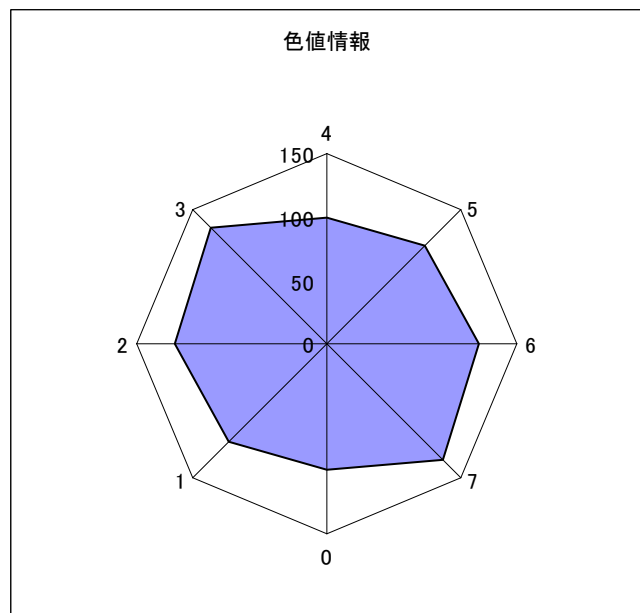
- 対照的な画像は、180度の反対側の色値が近似する画像です。
- 正対照的画像は、反対側の色値がすべて同じ値になります。
- このような画像は、現実には少ないかもしれません。
  
- 正対照的画像の図は、均整が取れて綺麗です。
- 輪郭もノイズも存在していることが分かります。
  
- 正負を入れ替えようとしている色値が近い値です。
- その結果、1行と3行、5行と7行の値が小さくなります。
  
- 正対照的画像は、 $x$ 軸と $y$ 軸以外の値がゼロに近づきます。
- スペクトル補正で、最も効果が期待できる画像でしょう。



# 画像28



## 対照的な画像\_計算結果



# 画像29



## 対照的な画像\_計算資料

No	色値	cos	sin	cos <sup>2</sup>	sin <sup>2</sup>	total	log	正規化
4	100	△ 40.0	△ 0.0	1600	0	1600	3.2	5.4
5	110	0.0	0.0	0	0	0	0.0	0.0
6	120	△ 40.0	△ 40.0	1600	1600	3200	3.5	5.9
7	130	0.0	0.0	0	0	0	0.0	0.0
0	100	920.0	0.0	846400	0	846400	5.9	10.0
1	110	0.0	0.0	0	0	0	0.0	0.0
2	120	△ 40.0	40.0	1600	1600	3200	3.5	5.9
3	130	0.0	0.0	0	0	0	0.0	0.0
	920	800.0	△ 0.0	851200	3200	854400	16.1	27.2

# いびつな画像

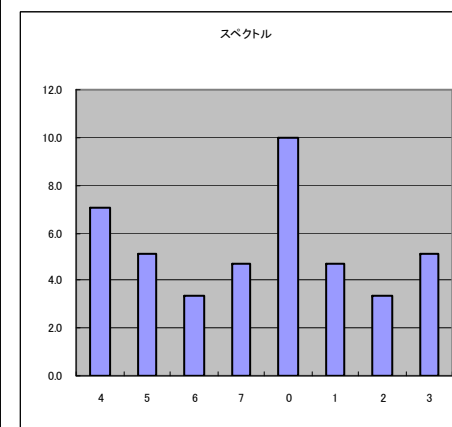
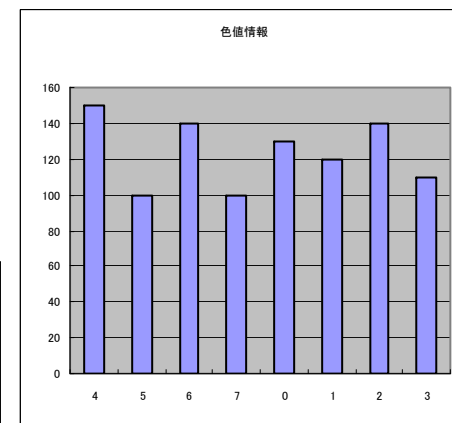
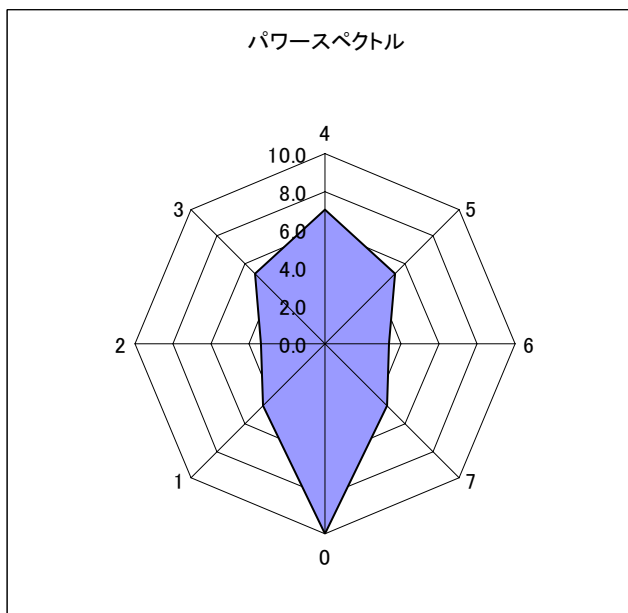
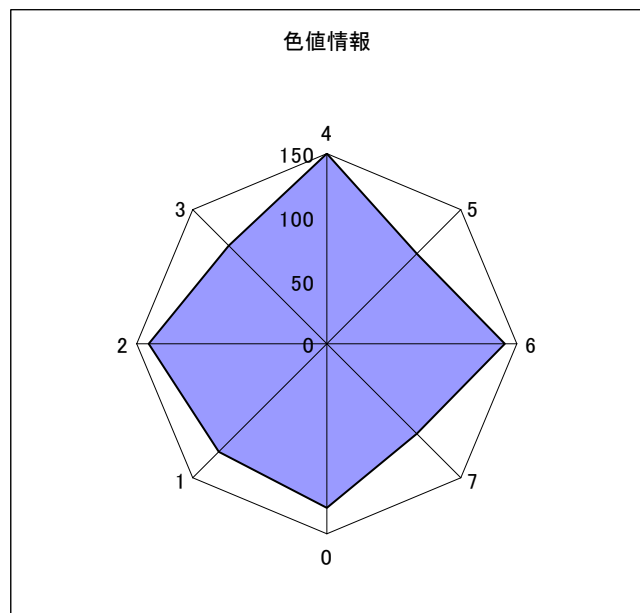


- 「いびつ」という名称ですが、本来の意味は違います。
- 「沢山の要素を含んだ画像」と言うのが正解です。
- 沢山の要素を含んでいるため、一言で言い表せないのです。
- 画像の多くがこの類の画像と言っても良いでしょう。
  
- 複雑なために、スペクトル補正が最も苦手とする画像です。
- ランダムノイズも、この一形態でしょう。
- スペクトル補正は、ランダムノイズには効果が薄いのです。
  
- 「いびつな画像はスペクトル補正に向いていない。」
- このことが直感で分かれば、十分ではないでしょうか。
- あはっ、これは私の負け惜しみですかね(笑)。

# 画像30

inet

## いびつな画像\_計算結果



# 画像31



## いびつな画像\_計算資料

No	色値	cos	sin	cos <sup>2</sup>	sin <sup>2</sup>	total	log	正規化
4	150	130.0	△ 0.0	16900	0	16900	4.2	7.1
5	100	△ 27.1	21.2	733	450	1183	3.1	5.1
6	140	△ 0.0	10.0	0	100	100	2.0	3.3
7	100	△ 12.9	21.2	167	450	617	2.8	4.7
0	130	990.0	0.0	980100	0	980100	6.0	10.0
1	120	△ 12.9	△ 21.2	167	450	617	2.8	4.7
2	140	△ 0.0	△ 10.0	0	100	100	2.0	3.3
3	110	△ 27.1	△ 21.2	733	450	1183	3.1	5.1
	990	1040.0	△ 0.0	998800	2000	1000800	25.9	43.3

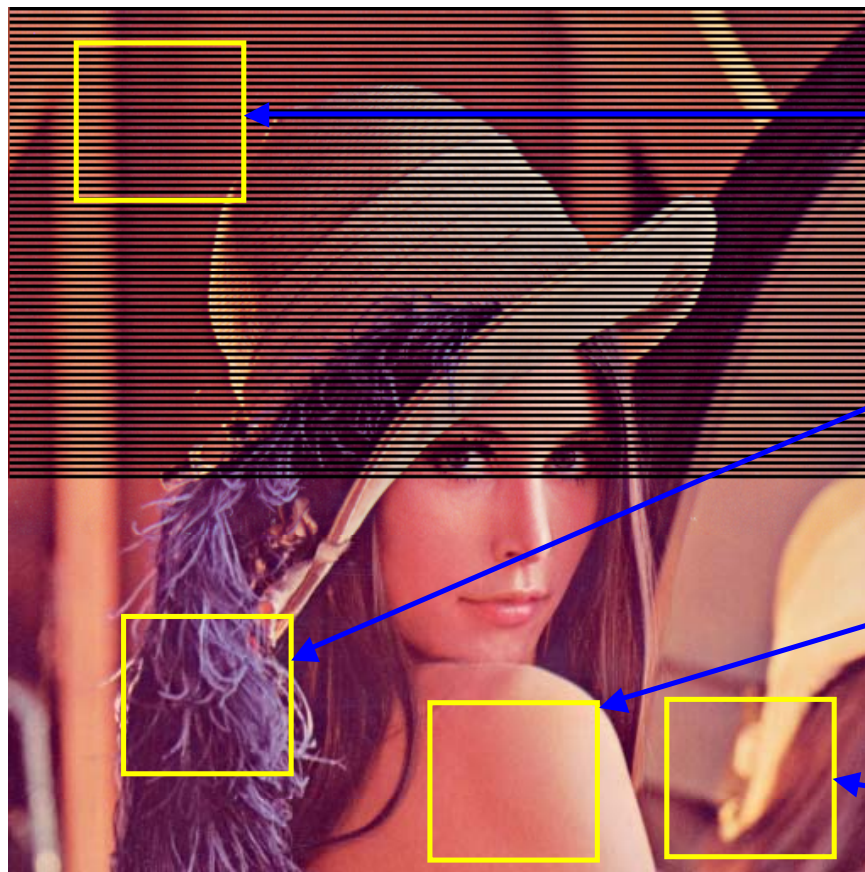
# 画像の周波数



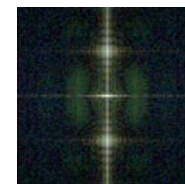
- 直感的な分析のため、画像をパターン別に4区分しました。
  - 「こんな画像パターンなんて無い。」と思われるかもしれませんよねえ。
  - 確かに、その通りです(あっさり)。
  - でも、特定の部分を考えると、そのような箇所があります。
  - その分析には、非常に役に立つと思います。
- 
- スペクトル画像の色値いわゆる周波数を眺めてみましょう。
  - 特定箇所の周波数は、次のようになっています。
  - ① 対照的な画像箇所                      周波数に十字が発生する。
  - ② 凹凸ある画像箇所                      周波数が全体に散在する。
  - ③ 滑らかな画像箇所                      周波数が中央に集中する。
  - ④ いびつな画像箇所                      周波数の形状が???

# 画像32

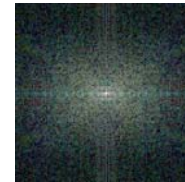
## 画像の周波数



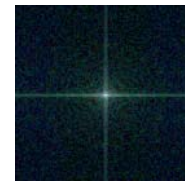
対照的な画像部分



凹凸のある画像部分



滑らかな画像部分



いびつな画像部分





# 後半のまとめ



- 後半部分の重要な要点をまとめてみましょう。
- ① スペクトル図表は、フーリエ変換の終着駅である。
- ② パワーは、「色値と色配置」を「二乗計算」したものの。
- ③ スペクトルは、「その分布状況」。
- ④ パワースペクトルの4つのポイント
  - ・ 面積計算。
  - ・ 絶対値計算。
  - ・ パワーは同じで、位相は異なる。
  - ・ イメージでスペクトル画像を考える。
- ⑤ 直感的な分析のため、画像を4パターン化する。
- ⑥ 図表を綺麗に表示するため、Logを使用する。
- ⑦ Log で計算した値の最大値を 100.0% とする。